Topologie

Blatt 5

Abgabe: 24.06.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

Sei X die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit zwei zusätzlichen Elementen $-\infty$ und $+\infty$ so, dass $-\infty < z < +\infty$ für jede ganze Zahl z. Setze $\mathcal{T}$ die Kollektion aller Intervallen der Form (a, b) mit $a < b$ aus $\mathbb{Z}$, sowie aller koendlichen Teilmengen von X, welche $-\infty$ oder $+\infty$ enthalten.

a) Zeige, dass $\mathcal{T}$ eine T_1-Topologie auf X definiert. Ist diese Topologie Hausdorff?

b) Zeige, dass jedes Element aus $\mathbb{Z}$ isoliert ist.

c) Beschreibe alle zusammenhängende Teilmengen von X.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

In $\mathbb{R}^2$ sei A_0 das Geradenstück, welches den Punkt $(0, 0)$ mit $(0, 1)$ verbindet. Für $n \neq 0$ aus $\mathbb{N}$ sei A_n das Geradenstück, welches den Punkt $(\frac{1}{n}, 0)$ mit $(0, 1)$ verbindet. Betrachte $X = \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ als topologischen Raum mit der Spurtopologie bezüglich der euklidischen Topologie von $\mathbb{R}^2$.

a) Ist X zusammenhängend? Ist X wegzusammenhängend?

b) Zeige, dass jedes $A_n \setminus \{(0, 1)\}$, mit $n \neq 0$, offen in X ist. Ist $A_0 \setminus \{(0, 1)\}$ offen?

c) Ist X lokal zusammenhängend?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Sei X ein 0-dimensionaler topologischer Raum mit der Eigenschaft T_1. Beschreibe alle zusammenhängenden Teilmengen von X.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

Sei $(X, <)$ eine linear geordnete Menge, welche gesehen als topologischer Raum mit der Ordnungstopologie zusammenhängend ist.

a) Zeige, dass die Ordnung X dicht ist: für $x < y$ aus X gibt es ein z in X mit $x < z < y$.

b) Gegeben eine Teilmenge S von X, setze

$$C = \{x \in X \mid a \leq x \text{ für alle untere Schranken } a \text{ von } S\}.$$

Zeige, dass C abgeschlossen ist und S enthält.

c) Schließe daraus, dass S ein Infimum hat, wenn S nicht leer ist und eine untere Schranke besitzt.

Hinweis: Wenn S kein Infimum hat, was bedeutet es für C? (Die Ordnung ist dicht)

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.